

Exercice 1

1) Probabilités conditionnelles.

Remarque 1 :

Lorsque les différentes issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité de se réaliser, comme dans l'exercice 1, on dit qu'il y a équiprobabilité. Lorsqu'il y a équiprobabilité on calcule la probabilité de A sachant que B est réalisé de la façon suivante :

$$P_B(A) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(B)} = \frac{\frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(\Omega)}}{\frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ où card}(A) \text{ désigne le nombre d'éléments de l'ensemble } A.$$

Définition 1 :

Soient A et B, 2 événements tels que $P(B) \neq 0$.

On appelle probabilité de « A sachant B » et on note $P_B(A)$ le nombre : $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

$P_B(A)$ désigne la **probabilité que l'évènement A se réalise sachant que B est réalisé**.

Exercice 2

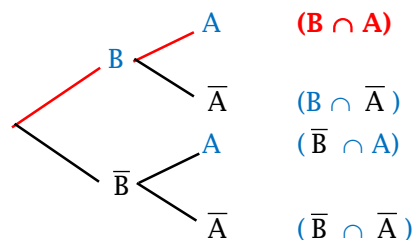
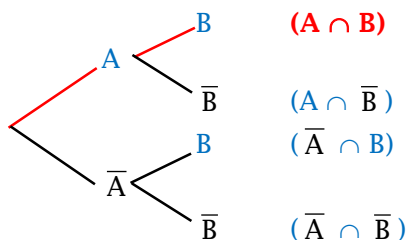
Remarque 2 :

Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, on a : $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ et $P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$.

Il y a donc deux formules permettant de calculer $P(A \cap B)$:

Arbre 1 : $P(A \cap B) = P(A) \times P_B(A)$.

Arbre 2 : $P(B \cap A) = P(B) \times P_A(B)$.



Formule des probabilités totales :

Soit A un événement. Alors pour tout événement B on a :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

Si de plus $A \neq \emptyset$ et $A \neq \Omega$ ($\Leftrightarrow \bar{A} \neq \emptyset$), alors pour tout événement B on a :

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$$

Définition 2 :

A et B indépendants $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Exercice 3

2) Variables aléatoires

Exercice 4

Définition 3 :

On considère une expérience aléatoire, on note Ω l'univers qui lui est associé.

Définir une **variable aléatoire** X sur Ω c'est définir une relation qui à tout élément ω de Ω associe un unique nombre réel noté $X(\omega)$.

Définition 4 :

Soit P la probabilité définie sur l'univers Ω .

L'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X , noté $X(\Omega)$, est appelé **univers image** de X .

Déterminer la **loi de probabilité** de X c'est calculer pour tout $x \in X(\Omega)$: $P(X = x)$.

Exercice 5

Définition 5 :

Soit X une variable aléatoire. On note : $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$: $p_i = P(X = x_i)$.

On appelle **espérance mathématique** de la variable X et on note **E(X)** le nombre :

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = \sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i.$$

Remarque 3 :

L'espérance d'une variable aléatoire est sa "moyenne théorique".

Exercice 6

5 - CONDITIONNEMENT / INDEPENDANCE / VARIABLES ALEATOIRES : EXERCICES

Temps indicatif à consacrer aux exercices : 3h30 à 5h.

Exercice 1 :

Dans une classe de 30 élèves sont formés un club photo et un club théâtre. Le club photo est composé de 10 membres, le club théâtre de 6 membres. Il y a deux élèves qui sont membres des deux clubs à la fois.

On interroge un élève de la classe pris au hasard.

On note : A l'événement « l'élève fait partie du club photo » ;

B l'événement « l'élève fait partie du club théâtre ».

1.
 - a. Calculer la probabilité que l'élève choisi fasse partie du club photo ; fasse partie du club théâtre.
 - b. Calculer la probabilité que l'élève choisi fasse partie du club photo et du club théâtre.
 - c. Sachant que l'élève pris au hasard fait partie du club théâtre, calculer la probabilité qu'il fasse partie du club photo.

2. Lors d'une séance du club photo, tous les membres sont présents. Un premier élève est tiré au sort.

Il doit prendre la photo d'un autre membre du club qui sera lui aussi tiré au sort.

On note : (*) T_1 l'événement « Le premier élève appartient au club théâtre » ;

(*) T_2 l'événement « L'élève pris en photo appartient au club théâtre ».

Calculer la probabilité que l'élève pris en photo appartient au club théâtre sachant que le premier élève appartient au club théâtre.

Exercice 2 :

Une urne A contient une boule rouge et trois boules vertes.

Une urne B contient deux boules rouges et deux boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher.

On dispose d'un dé à 6 faces, parfaitement équilibré, numérotées de 1 à 6. On le lance une fois ; si on obtient un multiple de 3, on tire au hasard une boule de l'urne A, sinon on tire au hasard une boule de l'urne B.

1. Modéliser la situation à l'aide d'un arbre.
2. Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire.
3. Quelle est la probabilité que la boule tirée provienne de l'urne B sachant qu'elle est rouge ?

Exercice 3 :

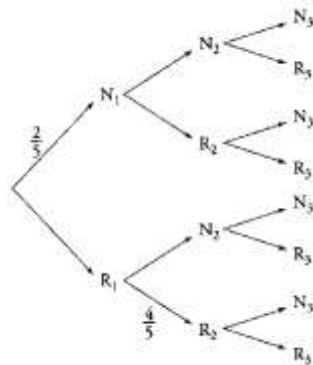
On considère trois urnes U_1 , U_2 et U_3 .

L'urne U_1 contient deux boules noires et trois boules rouges ; l'urne U_2 contient une boule noire et quatre boules rouges ; l'urne U_3 contient trois boules noires et quatre boules rouges.

Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et une boule de U_2 , à les mettre dans U_3 , puis à tirer au hasard une boule de U_3 .

Pour i prenant les valeurs 1, 2 et 3, on désigne par N_i (respectivement R_i) l'événement « on tire une boule noire de l'urne U_i » (respectivement « on tire une boule rouge de l'urne U_i »).

1. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités suivant :



2.
 - a. Calculer la probabilité des événements $N_1 \cap N_2 \cap N_3$ et $N_1 \cap R_2 \cap N_3$
 - b. En déduire la probabilité de l'événement $N_1 \cap N_3$.
 - c. Calculer de façon analogue la probabilité de l'événement $R_1 \cap N_3$.
3. Déduire de la question précédente la probabilité de l'événement N_3 .
4. Les événements N_1 et N_3 sont-ils indépendants ?
5. Sachant que la boule tirée dans U_3 est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

Exercice 4 :

Une urne contient 4 boules :

- deux boules bleues numérotées 1 et 3 ;
- deux boules rouges numérotées 1 et 2.

On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1. A l'aide d'un arbre, déterminer l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire. Préciser $\text{Card}(\Omega)$.
2. On note X le plus grand des deux nombres tirés.
 - a. Quelles sont les valeurs possibles pour X ?
 - b. Calculer la probabilité d'obtenir chacune de ces valeurs.

Exercice 5 :

Une urne contient cinq jetons numérotés de 1 à 5. On tire simultanément deux jetons.

1. Ecrire l'univers Ω associé à cette épreuve.

On considère la variable aléatoire S qui à chaque éventualité associe la somme des deux nombres obtenus.

2. Déterminer la loi de probabilité associée à S .

Exercice 6 :

On place au hasard un jeton sur l'une des cases du damier ci-contre.

On désigne respectivement par L et C les variables aléatoires indiquant respectivement les numéros de la ligne et de la colonne où se situe le jeton.

On définit la variable aléatoire $M = \text{Max}(L ; C)$.

1. Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires L et M .
2. Calculer leurs espérances.

	1	2	3
1			
2			•
3			